АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ASTRONOMICAL JOURNAL OF THE SOVIET UNION

1942 XIX, 5

В. А. АМБАРЦУМИАН.

О РАССЕЯНИИ СВЕТА АТМОСФЕРАМИ ПЛАНЕТ.

Вопрос о рассеянии света мутными средами, в частности планетными атмосферами, был предметом большого числа теоретических исследований. Математическая трудность вопроса приводила к тому, что не было найдено даже приближенного решения задачи в удовлетворительной форме, так как применявшиеся методы приближения не всегда находились в соответствии с физическими условиями, встречающимися на практике.

Как известно, вопрос о распределении яркости по диску планеты сводится к проблеме диффузного отражения от плоского мутного слоя определенной оптической толщины. В свою очередь вопрос о диффузном отражении от мутной среды решается на основе расчета светового режима в такой среде, освещенной наружными источниками, причем должны учитываться рассеяния не только первого, но и высших порядков.

В предыдущей работе автором было дано точное решение идеализованной задачи о световом режиме в среде, простирающейся в бесконечность в обе стороны (двухсторонняя бесконечность) при любой форме индикатрисы рассеяния. Вместе с тем это решение послужило исходным приближением для нахождения решения проблемы односторонней бесконечности и диффузного отражения света методом последовательных приближений.

В настоящей работе дается новое и достаточно точное для практических целей решение задачи о диффузном отражении путем приведения ее к некоторому функциональному уравнению, легко разрешаемому численно. Особенностью нового метода является то, что величины, характеризующие отражательную способность, получаются из функционального уравнения непосредственно, без промежуточного этапа, каким обычно является вычисление различных функций, характеризующих световой режим во внутренних слоях среды.

При этом так же, как и в предыдущей работе, мы можем не ограничиваться случаем сферической индикатрисы рассеяния. Однако, из соображений удобства мы решили сосредоточить в настоящей статье изложение вопросов, связанных со случаем сферической индикатрисы рассеяния, отложив рассмотрение общего случая до следующей нашей работы. Попутно оказывается, как мы увидим, возможным разрешить формальную сторону вопроса о распределении энергии по диску солнца.

---

[1]) Труды Астрономической Обсерватории Ленинградского Университета, т. 11 64 1941 г.

I. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДИФФУЗНОГО ОТРАЖЕНИЯ.

Пусть имеем плоскопараллельные слои материи, рассеивающей и поглощающей одновременно. Пусть эта среда заполняет полупространство (односторонняя бесконечность). Пусть далее отношение коэфициента рассеяния к коэфициенту экстинкции (т. е. к сумме коэфициентов поглощения и рассеяния) постоянно. Обозначим его через λ. Пусть на плоскую границу среды падает излучение под углом θ_0 к нормали. Обозначим величину потока излучения через единичную площадку, перпендикулярную к нему через πS.

Тогда, как известно, интегральное уравнение теории рассеяния в случае сферической индикатрисы имеет вид:

$$B(\tau)=\frac{\lambda}{4}Se^{-\tau\sec\theta_0}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^\infty Ei\,|\tau-t|\,B(t)dt, \tag{1}$$

где $B(\tau)=\frac{\eta}{\alpha}$ есть отношение коэфициента излучения к коэфициенту экстинкции, а τ — оптическая глубина. Если известно решение уравнения (I), то интенсивность света, выходящего под углом θ_1 к нормали из среды, т. е. интенсивность диффузно-отраженного света вычисляется по формуле:

$$I(\theta_1)=\int\limits_0^\infty e^{-\tau\sec\theta_1}B(\tau)\sec\theta_1 d\tau. \tag{2}$$

Обычный метод решения проблемы заключается в том, что при заданном параметре θ_0 решается уравнение (I), и решение $B(\tau)$ подставляется в (2). Таким образом определяется J как функция угла падения θ_0 и отражения θ_1. Из линейности задачи следует, что B, а следовательно и J будут пропорциональны S. Обозначим:

$$\frac{J}{S}=r(\theta_1,\ \theta_0).$$

Величина $r(\theta_1, \theta_0)$ не зависит от S, а зависит от обоих углов θ_1 и θ_0.

Решение задачи о диффузном отражении и заключается в нахождении функции $r(\theta_1, \theta_0)$. Метод настоящей работы заключается в том, что составляется уравнение, определяющее непосредственно функцию $r(\theta_1, \theta_0)$ и ищется его решение.

2. ВЫВОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ФУНКЦИЮ $r(\theta_1, \theta_0)$.

Для удобства обозначим в уравнении (I) $\sec\theta_0$ через ξ и введем замену переменных: $\tau=\sigma+a$, $t=s+a$,

$$B(\sigma+a)=\frac{\lambda}{4}e^{-\xi(\sigma+a)}+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-a}^\infty Ei\,|\sigma-s|\,B(s+a)\,ds. \tag{3}$$

Для удобства мы положили на время $S=1$.

Продиференцируем это уравнение по a:

$$B'(\sigma+a,\ \xi)-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{-a}^\infty Ei\,|\sigma-s|\,B'(s+a,\ \xi)\,ds=-\frac{\lambda}{4}\xi e^{-\xi(\sigma+a)}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}Ei(\sigma+a)\,B(0,\ \xi),$$

где явно указана зависимость B от параметра $\xi=\sec\theta_0$.

Полагая $a=o$, получаем:

$$B'(\sigma,\xi)-\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty Ei\,|\sigma-s|\,B'(s,\xi)\,ds=-\frac{\lambda}{4}\xi e^{-\xi\sigma}+\frac{\lambda}{2}Ei\,(\sigma)\,B\,(0,\xi). \quad (4).$$

Но

$$Ei\,(\sigma)=\int_1^\infty e^{-\sigma\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

откуда следует, что правая часть уравнения (4) представляет собою суперпозицию членов того же типа, что и $e^{-\xi\sigma}$ т. е. свободный член уравнения (4) складывается из слагаемых того же типа, что и свободный член уравнения (I). Вследствие линейности уравнения (4), это решение поэтому представится в виде суперпозиции решений уравнения (I). Именно:

$$B'\,(\sigma,\,\xi)=-\,\xi\,B\,(\sigma,\,\xi)+2B\,(0,\xi)\int_1^\infty B\,(\sigma,\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (5)$$

Помножая это уравнение на $e^{-\eta\sigma}$ и интегрируя по σ находим:

$$\int_0^\infty e^{-\eta\sigma}B'\,(\sigma,\,\xi)\,d\sigma=-\xi\int_0^\infty e^{-\eta\sigma}B\,(\sigma,\,\xi)\,d\sigma+$$

$$+2B\,(0,\,\xi)\int_1^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^\infty B\,(\sigma,\,\zeta)\,e^{-\eta\sigma}d\sigma. \qquad (6)$$

Применяя к левой стороне интегрирование по частям, мы можем исключить производную от функции B:

$$\eta\int_0^\infty e^{-\eta\sigma}B\,(\sigma,\,\xi)\,d\sigma-B\,(0,\,\xi)=-\xi\int_0^\infty e^{-\eta\sigma}B\,(\sigma,\,\xi)\,d\sigma+$$

$$+2B\,(0,\,\xi)\int_1^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^\infty B\,(\sigma,\,\zeta)\,e^{-\eta\sigma}d\sigma. \qquad (7)$$

Но

$$\eta\int_0^\infty e^{-\eta\sigma}B\,(\sigma,\,\xi)\,d\sigma=I\,(\eta)=r\,(\eta,\,\xi)$$

поскольку мы приняли $S=1$.

Поэтому (7) перепишется в виде:

$$\frac{\xi+\eta}{\eta}r\,(\eta,\,\xi)=B\,(0,\,\xi)\left\{1+\frac{2}{\eta}\int_1^\infty r\,(\eta,\,\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}.$$

Обозначим теперь:

$$r\,(\eta,\,\xi)=\eta R\,(\eta,\,\xi).$$

Тогда $R\,(\eta,\,\xi)$ должна удовлетворять уравнению:

$$(\xi+\eta)\,R\,(\eta,\,\xi)=B\,(0,\,\xi)\left\{1+2\int_1^\infty R\,(\eta,\,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}. \qquad (8)$$

С другой стороны, положив в уравнении (1) $\tau=o$ мы имеем:

$$B\ (0,\ \xi)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+2\int\limits_0^\infty EitB\ (t,\ \xi)\ dt\right\},$$

или заменяя Eit через интегральное представление:

$$B\ (0,\ \xi)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+\frac{2}{\xi}\int\limits_1^\infty r(\xi,\ \zeta)\ \frac{d\zeta}{\zeta}\right\}. \tag{9}$$

Заменяя $r=\eta R$ получаем:

$$B\ (0,\ \xi)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+2\int\limits_1^\infty R\ (\xi,\ \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}. \tag{9a}$$

Подставляя (9a) в (8), находим:

$$(\xi+\eta)\ R\ (\eta,\ \xi)=\frac{4}{\lambda}B\ (0,\ \xi)\ B\ (0,\ \eta),$$

$$r\ (\eta,\ \xi)=\frac{4}{\lambda}\frac{\eta}{\eta+\xi}B\ (0,\ \xi)\ B\ (0,\ \eta) \tag{10}$$

Таким образом мы сразу видим, что в рассматриваемом случае сферической индикатрисы рассеяния функция $r(\eta,\xi)$, характеризующая диффузное отражение, представляется с точностью до множителя $\frac{\eta}{\eta+\xi}$ в виде произведения двух одинаковых функций, зависящих каждая только от одного аргумента. Заметим, что недавно Minnaert[1] в своей работе указал на то, что отношение $\frac{r\ (\eta,\ \xi)}{\eta}$ всегда должно быть симметричной функцией от η и ξ независимо от индикатрисы рассеяния. В печатающейся ныне работе В. А. Фока[2] было впервые показано другим методом на основе исследования точного решения уравнения (I), что отношение $\frac{\eta+\xi}{\eta}r\ (\eta,\xi)$ представляет собою произведение некоторой функции от η на такую же функцию от ξ и получено представление этой функции через определенный интеграл, зависящий от параметра. Наша цель заключается теперь в выводе функционального уравнения для B (o, ξ).

Подставляя (10) в правую часть уравнения (9a), мы находим для B (o, ξ) уравнение:

$$B\ (0,\ \xi)=\frac{\lambda}{4}\left\{1+\frac{8}{\lambda}B\ (0,\ \xi)\int\limits_1^\infty\frac{B\ (0,\ \zeta)}{\xi+\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}$$

Вместо $\xi=\sec\theta_0$ мы можем ввести аргумент $x=\frac{1}{\xi}=\cos\theta_0$ и обозначить

$$\frac{2}{\sqrt{\lambda}}B\ (0,\xi)=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}B\left(0,\frac{1}{x}\right)=\varphi\ (x) \tag{11}$$

Тогда для φ (x) находим функциональное уравнение

$$\varphi\ (x)=\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left\{1+2\varphi\ (x)\ x\int\limits_0^1\frac{\varphi\ (z)}{x+z}\,dz\right\}. \tag{12}$$

---

[1]) Astrophysical Journal, 93, 403, 1941

[2]) В печати.

Теперь функцию $r(\eta, \xi)$ можно представить как функцию косинусов y и x:

$$r(y, x) = \frac{x}{x+y} \varphi(x) \varphi(y). \tag{13}$$

Таким образом, численное решение функционального уравнения (12) сразу дает нам возможность найти функцию диффузного отражения $r(y, x)$. В следующем параграфе приводится решение этого уравнения для различных λ.

Преимуществом излагаемого метода является, как мы видим, то обстоятельство, что не приходится вводить в вычисление функций, характеризующих световой режим внутри самой среды.

Отметим, наконец, что наш метод сведения интегрального уравнения (I) к функциональному уравнению посредством Лапласовского преобразования неизвестной функции может быть обобщен и на более широкий класс уравнений с ядрами, зависящими от разности $\tau - t$.

3. РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ $\varphi(x)$.

Введем вместо φ функцию ψ, связанную с φ соотношением

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \psi(x). \tag{14}$$

Тогда $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\psi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x\psi(x) \int_0^1 \frac{\psi(z)}{x+z} dz. \tag{15}$$

При $\lambda < 1$ (практически при $\lambda < 0{,}95$) это уравнение удобно решать численно последовательными приближениями. В качестве нулевого приближения примем: $\psi_0(x) = 1$. Подставим эту функцию вместо $\psi(x)$ в правую часть и проинтегрируем. Получим первое приближение:

$$\psi_1(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x\psi_0(x) \int_0^1 \frac{\psi_0(z)\, dz}{x+z}$$

и т. д. Все интегрирования нами производились по формуле Симпсона, и процесс велся до тех пор, пока $\psi_n(x)$ не совпадало с $\psi_{n-1}(x)$ с точностью до единицы третьего знака, что с избытком достаточно для целей современной астрофотометрии. Значения функции ψ в каждом из приближений определялись для значений $x = 0{,}0; 0{,}1; 0{,}2; \ldots 1.0$

Таков принцип метода. На самом деле процесс сходится гораздо быстрее, если взять за нулевое приближение не $\psi_0(x) = 1$, а некоторую численно заданную функцию от x, про которую заведомо известно, что она близка к решению. Так, например, из уравнения (15) прямо видно, что точное значение $\psi(0)$ равно единице. Пользуясь этим, мы можем принять за нулевое приближение линейную функцию типа:

$$\psi_0(x) = 1 + ax,$$

где постоянную a можно определить из условия, что интеграл от $\psi_0(x)$ по всему промежутку равен точному значению интеграла от искомой функции, т. е.

$$1 + \frac{a}{2} = \int_0^1 \psi(x)\, dx, \tag{16}$$

Точное значение интеграла от искомой функции может быть, как сейчас будет показано, легко определено из уравнения (15) непосредственно и тем самым из (16) может быть определено a.

Для вычисления $\int_0^1 \psi(x)\,dx$ проинтегрируем обе части уравнения (15)

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx = 1 + \frac{\lambda}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\psi(x)\,\psi(z)\,z\,dz\,dx}{x+z}.$$

Замечая, что двойной интеграл в правой части равен

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \psi(x)\,\psi(z)\,dz\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \psi(x)\,dx\right]^2,$$

мы получаем квадратное уравнение для определения значения искомого интеграла, из которого:

$$\int_0^1 \psi(x)\,dx = \frac{2}{\lambda}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right). \tag{17}$$

Для той же цели улучшения исходного приближения можно пользоваться процессами интерполяции и экстраполяции, если уже вычислено решение для двух достаточно удаленных значений λ. Небольшая практика в вычислениях быстро приводит к тому, что удается подобрать столь хорошее исходное приближение, что уже второе приближение отличается от первого всего на две, три единицы третьего знака после запятой.

При $\lambda > 0.95$ изложенный выше вариант метода последовательных приближений теряет свою практичность и лучше его модифицировать следующим образом:

под интегралом в (15) заменим:

$$\frac{x}{x+z} = 1 - \frac{z}{x+z}.$$

Тогда:

$$\psi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2}\,\psi(x)\int_0^1 \psi(z)\,dz - \frac{\lambda}{2}\,\psi(x)\int_0^1 \frac{\psi(z)\,z\,dz}{x+z},$$

или на основании (17)

$$\sqrt{1-\lambda}\;\psi(x) = 1 - \frac{\lambda}{2}\,\psi(x)\int_0^1 \frac{\psi(z)\,z\,dz}{x+z},$$

или

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda} + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\psi(z)\,z\,dz}{x+z}}. \tag{18}$$

Подставим в правую часть нулевое приближение $\psi_0(z)$, тогда получим некоторую функцию $\psi_1(z)$. Затем полусумму $\bar{\psi}(z) = \frac{1}{2}\,[\psi_0(z) + \psi_1(z)]$ вновь подставим в правую часть (18), получим некоторую функцию $\psi_2(z)$. Образуем опять полусумму и т. д. При $\lambda > 0.95$ процесс быстро сходится.

Заметим кстати, что при $\lambda = 1$ уравнение (17) превращается в

$$\varphi(x) \int_0^1 \frac{\varphi(z)\, z\, dz}{x+z} = 2,$$

или

$$\frac{2}{x} \int_0^1 r(z, x)\, z\, dz = 1.$$

Помножая обе части этого равенства на $\pi S x$ находим, что это уравнение представляет собою условие равенства, падающего и отраженного потока, т. е. условие, что при $\lambda = 1$ альбедо при всех углах падения равно единице.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЯРКОСТИ ПО ДИСКУ ПЛАНЕТЫ.

Полученные результаты дают возможность определить распределение яркости по диску планеты в различных фазах. Особенно простой результат получается для случая, когда планета находится в противостоянии. В этом случае $\theta_1 = \theta_0$ и $y = x$. Поэтому, согласно (13):

$$r(y, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2,$$

где x есть косинус планетоцентрического углового расстояния от центра диска. Поэтому, для интенсивности имеем:

$$I = \frac{1}{2} [\varphi(x)]^2 S. \tag{19}$$

Поскольку интенсивность (на языке визуальной фотометрии) абсолютно белой поверхности, перпендикулярной к лучам солнца рассеивающей по закону Ламберта и находящейся на расстоянии планеты от солнца, равна S, то можно сказать, что $\frac{1}{2}[\varphi(x)]^2$ есть отношение яркости в точке x диска и яркости такой воображаемой белой поверхности.

Наибольший контраст, т. е. наибольшее отношение центра к краю, получается в случае $\lambda = 1$, т. е. в случае чистого рассеяния. При стремлении λ к нулю диск планеты становится равномерным по яркости.

При сравнении полученных результатов с наблюдениями надо иметь в виду, что изложенная здесь теория относится прежде всего к газовым оболочкам и притом обладающим достаточной оптической толщиной. Повидимому, этим условиям удовлетворяют атмосферы Юпитера, Сатурна и Венеры. Далее мы пока разобрали лишь частный случай сферической индикарисы рассеяния. Допускается также, что на различных точках поверхности планеты атмосфера обладает одинковыми свойствами, т. е. мы отвлекались от атмосферных деталей.

Вполне возможно и даже вероятно, что у реальных атмосфер планет индикатриса рассеяния вовсе не сферическая. Теоретический расчет для несферических индикатрис будет нами приведен в другой работе. Имея в виду все приведенные оговорки, мы все же провели сравнение с наблюдениями для случая Юпитера. Для него имеются абсолютные измерения яркости на диске, опубликованные В. В. Шароновым[1].

[1] Циркуляр Пулковской Обсерватории № 30, 48, 1939.

Заметим, что наибольший смысл имеют сравнения именно с абсолютными определениями, потому что подобрать некоторое λ, при котором отношение центра к краю имеет наблюденное значение, всегда можно, если только это значение лежит между 1,0 и 8,0. Преимущество сравнений с абсолютными измерениями заключается в том, что по наблюденной яркости в центре диска ($x = 1{,}0$) можно найти λ, а затем по найденному λ из теории автоматически определяется контраст. Именно по этой причине были взяты для сравнения наблюдения В.В.Шаронова. Поскольку наблюдения дают в центре диска $r = 0.590$, то мы заключили, что для атмосферы Юпитера $\lambda = 0.969$. Оказывается, что теоретическая кривая $\frac{1}{2}\varphi^2$ при $\lambda = 0.969$ довольно хорошо представляет наблюденные значения яркости вдоль экваториального диаметра и только на самом краю диска расхождения превышают 10%. Поскольку для края диска наблюдения отягчены всегда большой ошибкой, то совпадение теоретической кривой с наблюдениями можно считать неожиданно хорошим.

5. ПЛОСКОЕ АЛЬБЕДО.

Введенные нами вспомогательные функции позволяют легко определить плоское альбедо среды, т. е. отношение потока, рассеянного средой, к потоку, падающему на нее. Очевидно, что вообще плоское альбедо зависит от угла падения.

Для потока, рассеянного на единицу площади среды, мы имеем:

$$H = \int I \cos\theta_1 \, d\omega_1 = S \int r(\theta_1, \theta_0) \cos\theta_1 \, d\omega_1,$$

где $d\omega_1$ элемент телесного угла. Для потока падающей энергии мы имеем:

$$F = \pi S \cos\theta_0.$$

Для альбедо находим:

$$A = \frac{H}{F} = \frac{1}{\pi\cos\theta_0} \int r(\theta_1, \theta_0) \cos\theta_1 \, d\omega_1 = \frac{2}{\cos\theta_0} \int r(\theta_1, \theta_0) \cos\theta_1 \sin\theta_1 \, d\theta_1$$

Так как

$$r(\theta_1, \theta_0) = R(\theta_1, \theta_0) \sec\theta_1,$$

то

$$A = \frac{2}{\cos\theta_0} \int R(\theta_1, \theta_0) \sin\theta_1 \, d\theta_1,$$

или

$$A = \frac{2}{y} \int_0^1 \frac{xy\,\varphi(y)\,\varphi(x)}{x + y} dx.$$

Преобразуя, находим:

$$A = 2\varphi(y) \int_0^1 \varphi(x)\,dx - 2\varphi(y) \int_0^1 \frac{y\varphi(x)\,dx}{x + y}.$$

Пользуясь (12), (14) и (17), мы преобразуем это равенство:

$$A = 1 - 2\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}\,\varphi(y). \tag{20}$$

Это и есть искомое выражение для альбедо. Таблица 3 содержит вычисленные согласно (20) значения A в зависимости от косинуса угла падения y и параметра λ. Мы видим, что при косом падении альбедо больше, чем при нормальном. Это выражено резче при малых λ, т. е. для сред с малым альбедо.

6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПО ДИСКУ СОЛНЦА И АНАЛОГИЧНЫЕ ЗАДАЧИ.

Пусть опять мы имеем плоскопараллельные рассеивающие и поглощающие слои. Пусть вся среда имеет конечную оптическую толщину τ_0. Пусть за этой средой расположены источники света. Тогда на передней границе среды мы будем иметь некоторый поток прошедшего через среду излучения. Будем увеличивать оптическую толщину среды, увеличивая одновременно яркость освещающих источников, находящихся за нею в такой пропорции, чтобы поток излучения, выходящего с передней границы, оставался постоянным. В пределе мы будем иметь среду, заполняющую полупространство, с источниками, расположен ными бесконечно глубоко. Ставя вопрос о световом режиме в такой среде, мы приходим к однородному интергальному уравнению:

$$\overline{B}(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty Ei\,/\tau - t/\,\overline{B}(t)\,dt. \tag{21}$$

В частности, при $\lambda=1$ мы имеем случай чистого рассеяния, а соответствующая математическая задача превращается в задачу Милна. Это связано с тем, что поставленная в этом параграфе задача о рассеянии при $\lambda=1$ математически эквивалентна проблеме лучевого равновесия фотосферы, хотя физический смысл происходящих в фотосфере процессов совершенно другой. Поэтому, получив для задачи (21) распределение выходящей интенсивности в зависимости от угла с нормалью, мы для $\lambda=1$ тем самым будем иметь и распределение энергии по диску солнца.

Интенсивность в зависимости от угла с нормалью определится уравнением:

$$r(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta t}\,\eta\,\overline{B}(t)\,dt, \tag{22}$$

где η есть секанс упомянутого угла. Как мы покажем, функция $r(\eta)$ также выражается через введенную ранее вспомогательную функцию φ.

В самом деле путем дифференцирования легко получить из уравнения (21) уравнение для производной $\overline{B}'(\tau)$

$$\overline{B}'(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty Ei\,/\tau - t/\,\overline{B}'(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\,Ei\tau\,\overline{B}(0). \tag{23}$$

Поскольку

$$Ei\,\tau = \int_1^\infty e^{-\tau\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta},$$

мы можем получить решение уравнения (23) в виде суперпозиции решений уравнений типа (3), т. е.

$$\overline{B}'(\tau) = 2\overline{B}(0)\int_1^\infty B(\tau,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\,. \tag{24}$$

где $B(\tau, \zeta)$ есть решение уравнения (3). Однако, (24) есть только одно из решений уравнения (23). Общее решение этого неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$\overline{B}'(\tau) = 2\overline{B}(0)\int_1^\infty B(\tau, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \mu\overline{B}(\tau), \tag{25}$$

где μ постоянная, которая должна быть выбрана так, чтобы правая часть (25) действительно равнялась производной от $\overline{B}(\tau)$. Помножая обе части (25) на $e^{-\eta\tau}$ и интегрируя, находим

$$\int_0^\infty e^{-\eta\tau}B'(\tau)\,d\tau = 2\frac{\overline{B}(0)}{\eta}\int_1^\infty r(\eta, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{\mu}{\eta}r(\eta),$$

где $r(\eta, \zeta)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущих параграфах. Интегрируя в левой части этого равенства по частям находим:

$$\eta\int_0^\infty e^{-\eta\tau}B(\tau)\,d\tau = \overline{B}(0)\left\{1 + \frac{2}{\eta}\int_1^\infty r(\eta, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\} + \frac{\mu}{\eta}r(\eta),$$

или

$$r(\eta)\left(1 - \frac{\mu}{\eta}\right) = \overline{B}(0)\left\{1 + 2\int_1^\infty R(\eta, \zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right\}. \tag{26}$$

Подставляя сюда вместо $R(\eta, \tau)$ его значение, а также заменяя $\frac{1}{\eta}$ через y, а $\frac{1}{\zeta}$ через z, т. е. заменяя секансы косинусами, получаем:

$$r(y) = \frac{\overline{B}(0)}{1 - \mu y}\left\{1 + 2\,y\,(y\varphi)\int_0^1 \frac{\varphi(z)\,dz}{z + y}\right\}, \tag{27}$$

где $\varphi(z)$, введенная нами в § 2 и уже затабулированная функция. В силу функционального уравнения (12) мы можем переписать (27) в виде

$$r(y) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\frac{\overline{B}(0)\,\varphi(y)}{1 - \mu y}. \tag{28}$$

Мы видим, что искомая интенсивность излучения, выходящего под углом arccos ψy к нормали пропорциональна

$$\frac{\varphi(y)}{1 - \mu y}$$

Теперь займемся определением параметра μ. Из уравнения (21) имеем:

$$\overline{B}(0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^\infty Ei\,t\,B(t)\,dt,$$

или

$$\overline{B}(0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^\infty e^{-t\zeta}\overline{B}(t)\,dt = \frac{\lambda}{2}\int_1^\infty \frac{r(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r(y)\,dy.$$

Подставляя вместо $r(y)$ его выражение из формулы (28), находим уравнение для определения μ:

$$\sqrt{\lambda}\int_0^1 \frac{\varphi(y)\,dy}{1-\mu y}=1 \tag{29}$$

Из этого уравнения нужно определить μ в зависимости от λ. Оказывается, что решением этого уравнения является $\mu=k$, где k попрежнему есть положительное число, связанное с λ соотношением:

$$\lambda=\frac{2k}{ln\frac{1+k}{1-k}}. \tag{30}$$

Для доказательства этого рассмотрим ограниченное решение уравнения:

$$\frac{\lambda}{2}\int_1^\infty e^{-\tau\xi}\frac{d\xi}{\xi(\xi-k)}=C(\tau)-\frac{\lambda}{2}\int_0^\infty Ei\,/\tau-t/\;C(t)\;dt. \tag{31}$$

где k положительное число, удовлетворяющее уравнению (30). Решение этого уравнения можно рассматривать как суперпозицию решений уравнения (3) и поэтому:

$$C(\tau)=2\int_1^\infty\frac{B(\tau,\xi)\;d\xi}{\xi(\xi-k)}. \tag{32}$$

Помножая обе части (32) на $e^{-\eta\tau}$ и интегрируя, находим в прежних обозначениях

$$\int_0^\infty C(\tau)e^{-\eta\tau}\;d\tau=2\int_1^\infty\frac{R(\eta,\xi)\;d\xi}{\xi(\xi-k)}. \tag{33}$$

Но с другой стороны мы можем написать явно единственное ограниченное решение уравнения (31). Оно равно:

$$C(\tau)=e^{-k\tau}. \tag{34}$$

По этому (33) перепишется в виде

$$\frac{1}{k+\eta}=2\int_1^\infty\frac{\varphi(\eta)\,\varphi(\xi)\;d\xi}{\xi(\xi+\eta)\,(\xi-k)}.$$

Заменяя опять $\frac{1}{\eta}=y$ и $\frac{1}{\xi}=x$ находим:

$$\frac{1}{1+ky}=2\varphi(y)\int_0^1\frac{x\,\varphi(x)\,dx}{(x+y)\,(1-kx)} \tag{35}$$

Интегрируя обе части по y находим:

$$\frac{1}{k}\ln(1+k)=2\int_0^1\frac{x\,\varphi(x)\;dx}{1-kx}\int_0^1\frac{\varphi(y)\,dy}{x+y}$$

или в силу функционального уравнения (12):

$$\frac{1}{k}\ln(1+k)=\int\limits_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\varphi(x)-1}{1-kx}\,dx,$$

что приводит к равенству:

$$\frac{1}{k}\ln\frac{1+k}{1-k}=\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^1\frac{\varphi(x)\,dx}{1-kx}$$

или на основании (30)

$$\sqrt{\lambda}=\int\limits_0^1\frac{\varphi(x)\,dx}{1-kx}$$

Иными словами, действительно, корень уравнения (29) равен k. В частном случае чистого рассеяния, когда $\lambda=1$, имеем на основании (28)

$$r(y)=A\ \varphi(y),$$

где A — постоянная. Поскольку математически задача о распределении энергии по диску солнца эквивалентна рассматриваемой в этом параграфе при $\lambda=1$, то мы можем сказать, что $\varphi\ (y)$ при $\lambda=1$ представляет собою распределение энергии по диску солнца.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Изложенный выше метод сведения интегрального уравнения к функциональному применим не только к интегральному уравнению рассеяния, но также и к другим уравнениям, в которых ядро зависит от разности своих аргументов. Весь ход рассуждений остается буквально тем же.

В другой работе мы дадим обобщение нашего метода на случай асферической индикатрисы рассеяния, когда задача сводится к системе функциональных уравнений, также сравнительно легко разрешаемых.

Астрономическая Обсерватория
Ленинградского Университета.
Декабрь 1941—январь 1942.

ON THE SCATTERING OF LIGHT BY THE PLANETARY ATMOSPHERES.

BY V. AMBARZUMIAN.

(Abstract)

The author obtained a sufficiently exact solution of the problem in the form of a functional equation easily calculated numerically. The character of the indicatrice of scattering may be arbitrary. In the present work only the spherical indicatrice is considered. The application is made to the problem of the distribution of brightness over the planetary and the solar discs.